



数学建模

层次分析法(AHP)



层次分析法

(Analytic Hierarchy Process, AHP)

历史：美国运筹学家萨蒂(T. L. Saaty)于1970年代初，为美国国防部研究“**根据各个工业部门对国家福利的贡献大小而进行电力分配**”课题时，应用网络系统理论和多目标综合评价方法，提出的一种层次权重决策分析方法。

特点：在对复杂的决策问题的本质、影响因素及其内在关系等进行深入分析的基础上，利用**较少的定量信息**使决策的思维过程数学化，从而为多目标、多准则或无结构特性的**复杂决策问题**提供简便的**决策方法**。是对难于完全定量的复杂系统作出决策的模型和方法。



决策：指在面临多种方案时需要依据一定的标准选择某一种方案.

例1：在**华为、苹果、小米、OPPO**四个牌号的手机中选购一种。要考虑品牌的信誉、手机的性能、价格和耗电量.

例2：在**泰山、杭州和承德**三处选择一个旅游点。要考虑景点的景色、居住的环境、饮食的特色、交通便利和旅游的费用.

例3：在**基础研究、应用研究和数学教育**中选择一个领域申报科研课题。要考虑成果的贡献（实用价值、科学意义），可行性（难度、周期和经费）和人才培养等因素.



层次分析法建模

- 1.层次分析法概述
- 2.层次分析法的步骤
3. 层次分析法应用实例



1. 层次分析法概述：

层次分析法(AHP法) 是一种解决多目标的复杂问题的**定性**
与定量相结合的决策分析方法。该方法将定量分析与定性
分析结合起来，用决策者的经验判断各衡量目标能否实现的
标准之间的**相对重要程度**，并合理地给出每个决策方案
的每个标准的权数，**利用权数求出各方案的优劣次序**，比
较有效地**应用于那些难以用定量方法解决的课题**。

应用领域：工程计划、资源分配、方案排序、政策制定、
冲突问题、性能评价、能源系统分析、城市规划、经济管理、
科研评价等。

数学建模竞赛美赛有关政策类题目，有AHP方法的应用。



层次分析法的步骤和方法:

1. 建立层次结构模型.
2. 构造判断（成对比较）矩阵.
3. 层次单排序及其一致性检验.
4. 层次总排序及其一致性检验.



1. 建立层次结构模型.

将决策的目标、考虑的因素（决策准则）和决策对象按它们之间的相互关系分为最高层、中间层和最低层，绘出层次结构图。

- **最高层：**决策的目的、要解决的问题。
- **最低层：**决策时的备选方案。
- **中间层：**考虑的因素、决策的准则。
- 对于相邻的两层，称高层为目标层，低层为因素层。

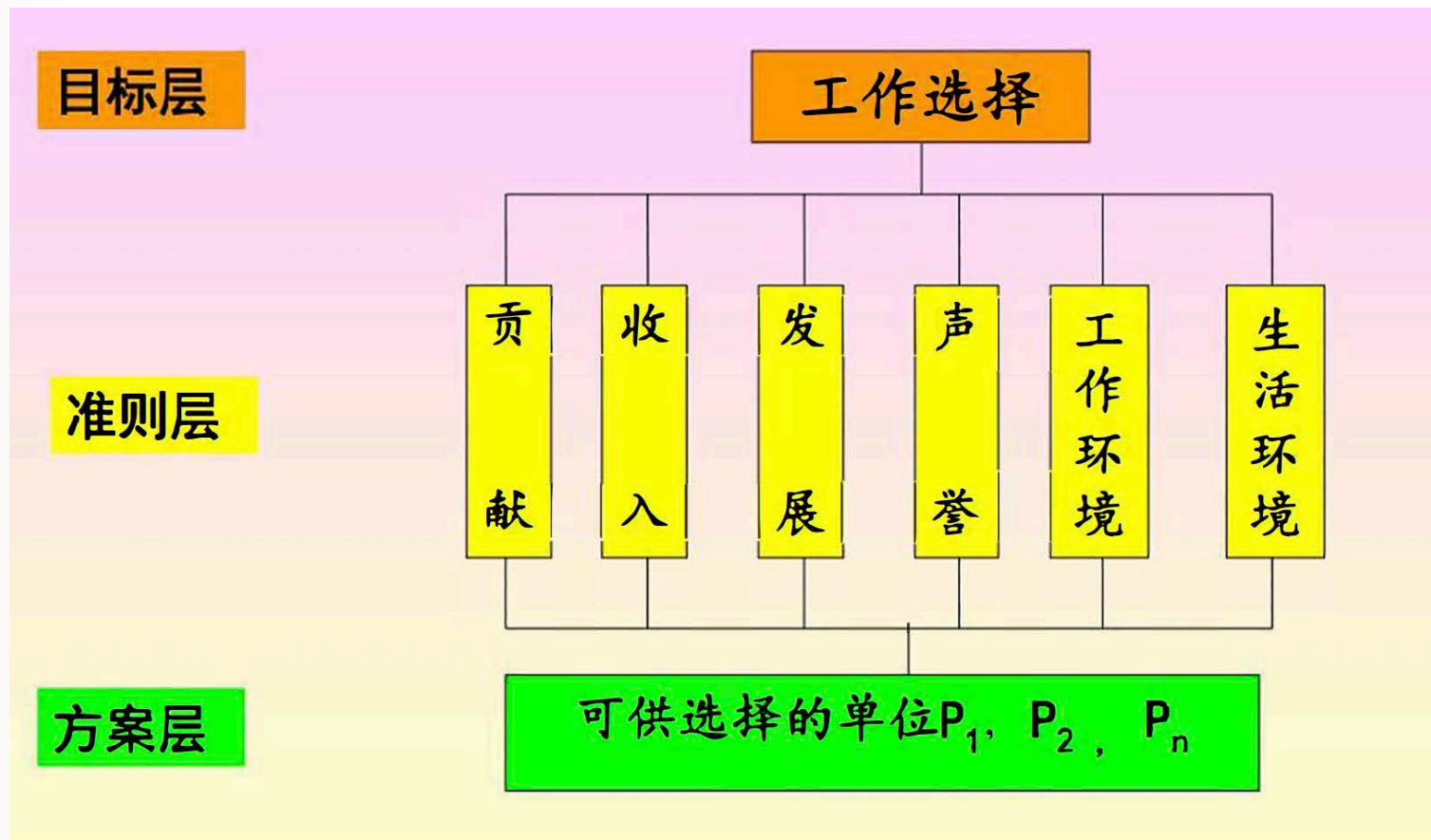


例1：大学毕业生就业选择问题

获得大学毕业学位的毕业生，在“双向选择”时，用人单位与毕业生都有各自的选择标准和要求。就毕业生来说选择单位的标准和要求是多方面的，例如：

1. 能充分发挥自己的才干，作出较好贡献（即工作岗位适合自己的专长）。
2. 工作收入高（待遇好）。
3. 生活环境好（大城市、气候等工作条件等）。
4. 单位名声好（声誉等）。
5. 工作环境好（人际关系和谐等）。
6. 发展晋升机会多（如新单位或前景好）等。

层次结构模型:



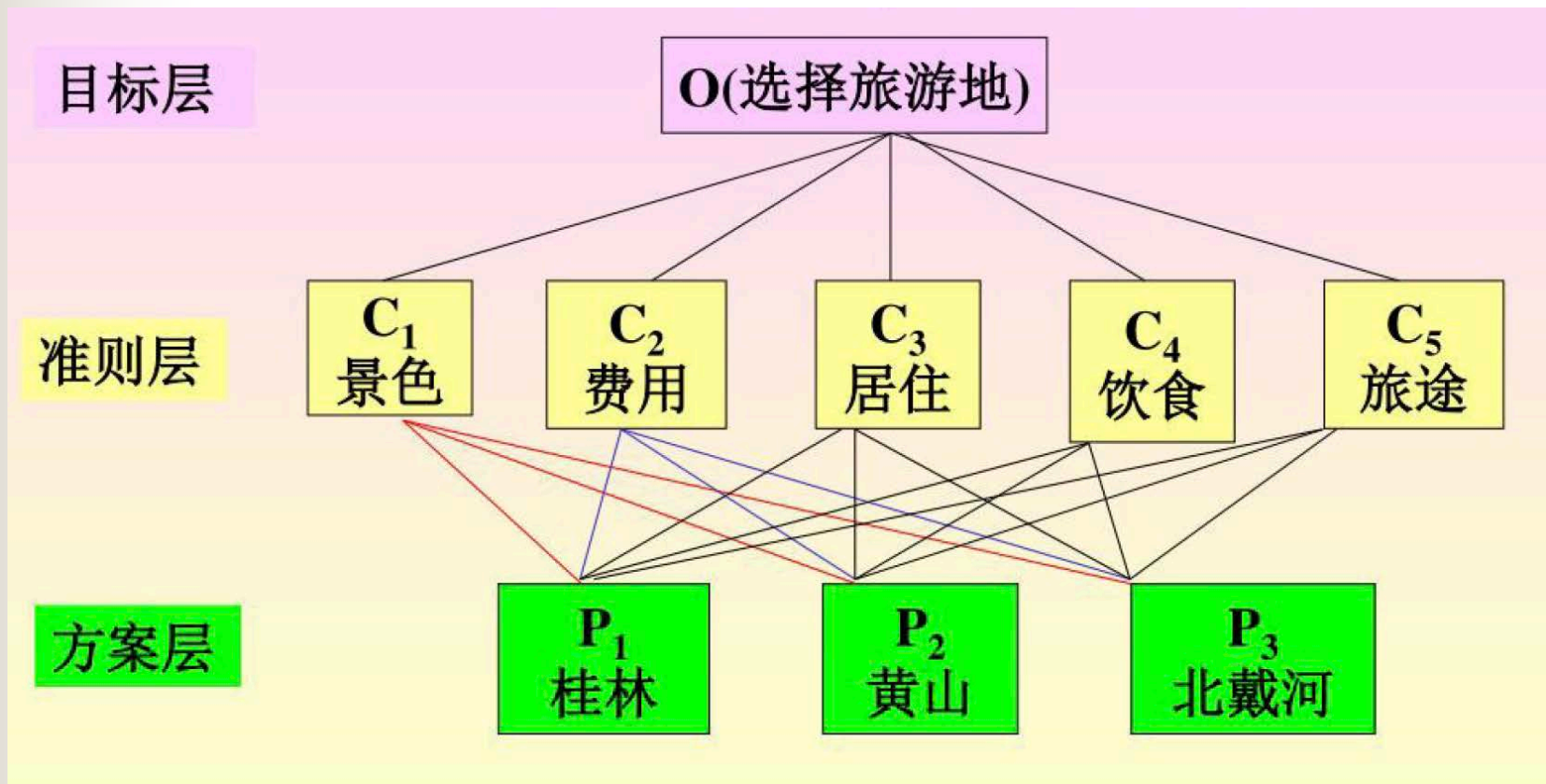


例2：旅游地选择.

如何在3个目的旅游城市中按照景色、费用、居住、餐饮、旅途条件因素进行选择？

思考：
如何构建层次模型？

层次结构模型:





例3：科研课题的选择.

某研究所现有三个科研课题，限于人力及物力，只能研究一个课题。有三个需考虑的因素：

(1).科研成果贡献大小（包括实用价值和科学意义）.

(2). 人才的培养.

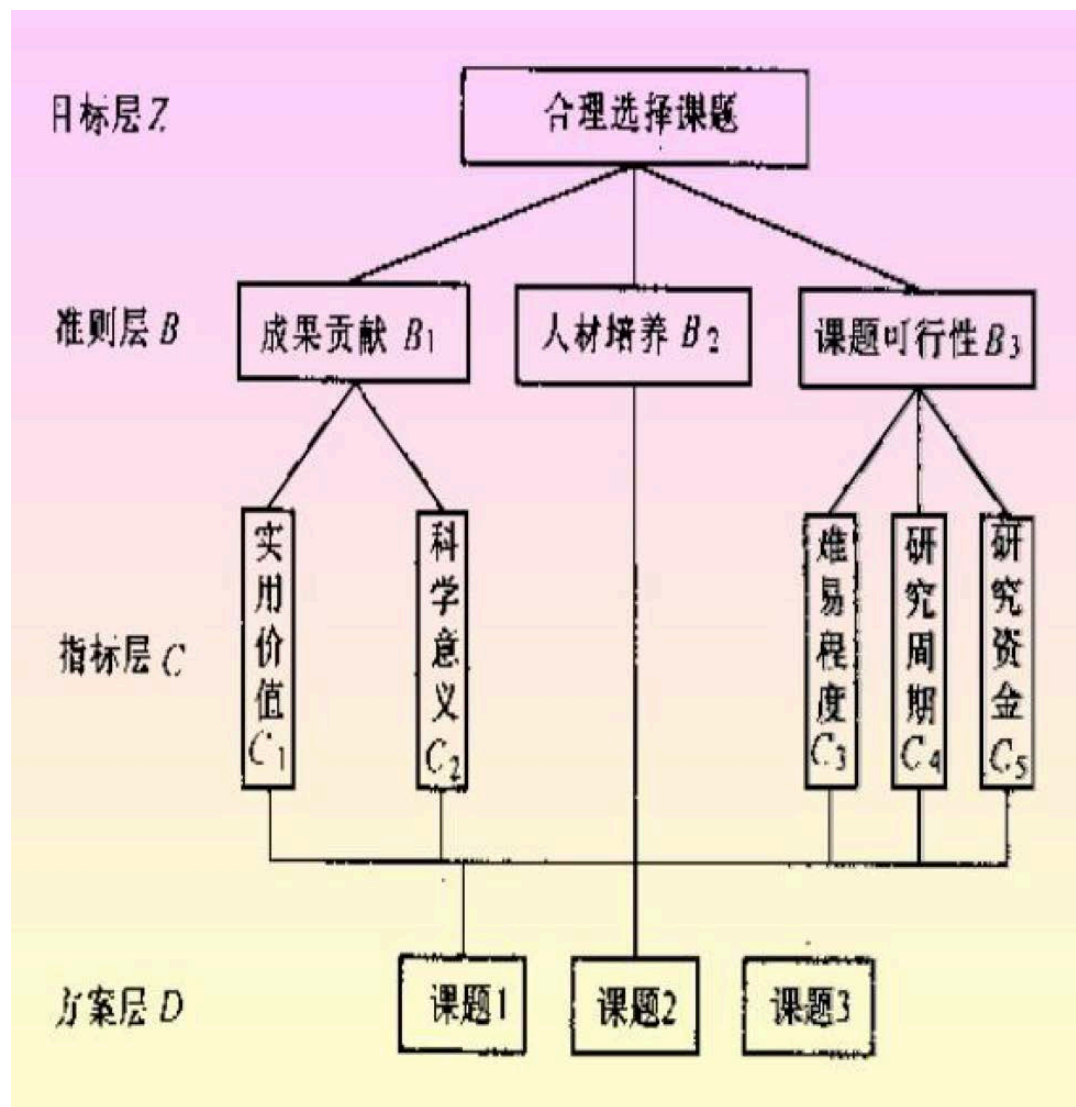
(3). 课题的可行性（包括课题的难易程度、研究周期及资金）。

在这些因素的影响下，如何选择课题？

思考：

怎样建立层次模型？

层次结构模型:





建立层次模型总结：

将决策问题分为3个或多个层次：

最高层：目标层，表示解决问题的目的。要达到的总目标。通常只有一个总目标。

中间层：准则层、指标层、...。表示采取某种措施、政策、方案等实现预定总目标所涉及的中间环节；一般又分为准则层、指标层、策略层、约束层等。

最低层：方案层。表示将选用的解决问题的各种措施、政策、方案等。通常有几个方案可选。

每层有若干元素，层间元素的关系用相连直线表示。



层次分析法总目标：

确定最低层对最高层的相对权重问题。

要求： 按此相对权重可以对最低层中的各种方案、措施进行排序，从而在不同的方案中作出选择或形成选择方案的原则。

思考：

怎样从数学上给一个合理的定量方法？



2.判断矩阵的构造

方法:

1. 不把所有因素放在一起比较，而是两两相互比较
2. 对此时采用相对尺度，以尽可能减少性质不同的诸因素相互比较的困难，以提高准确度。

判断矩阵是表示本层所有因素针对上一层某一个因素的相对重要性的比较。判断矩阵的元素 a_{ij} 用Santy的1—9标度方法给出。

心理学家认为在比较若干对象时，能够区别差异的心理学极限是 $7(+/-)2$ 。

判断矩阵元素 a_{ij} 的标度方法

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2, 4, 6, 8	上述两相邻判断的中值
倒数	因素 i 与 j 比较的判断 a_{ij} ，则因素 j 与 i 比较的判断 $a_{ji}=1/a_{ij}$



思考：

判断矩阵中的 $a_{ij} > 0$ 应该满足哪些最基本的性质？

1. 重要性与次序无关：正互反性，即 $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$.

进一步：

2. 重要性要协同：完全一致性，即： $a_{ik} a_{kj} = a_{ij}$

正互反矩阵与一致矩阵

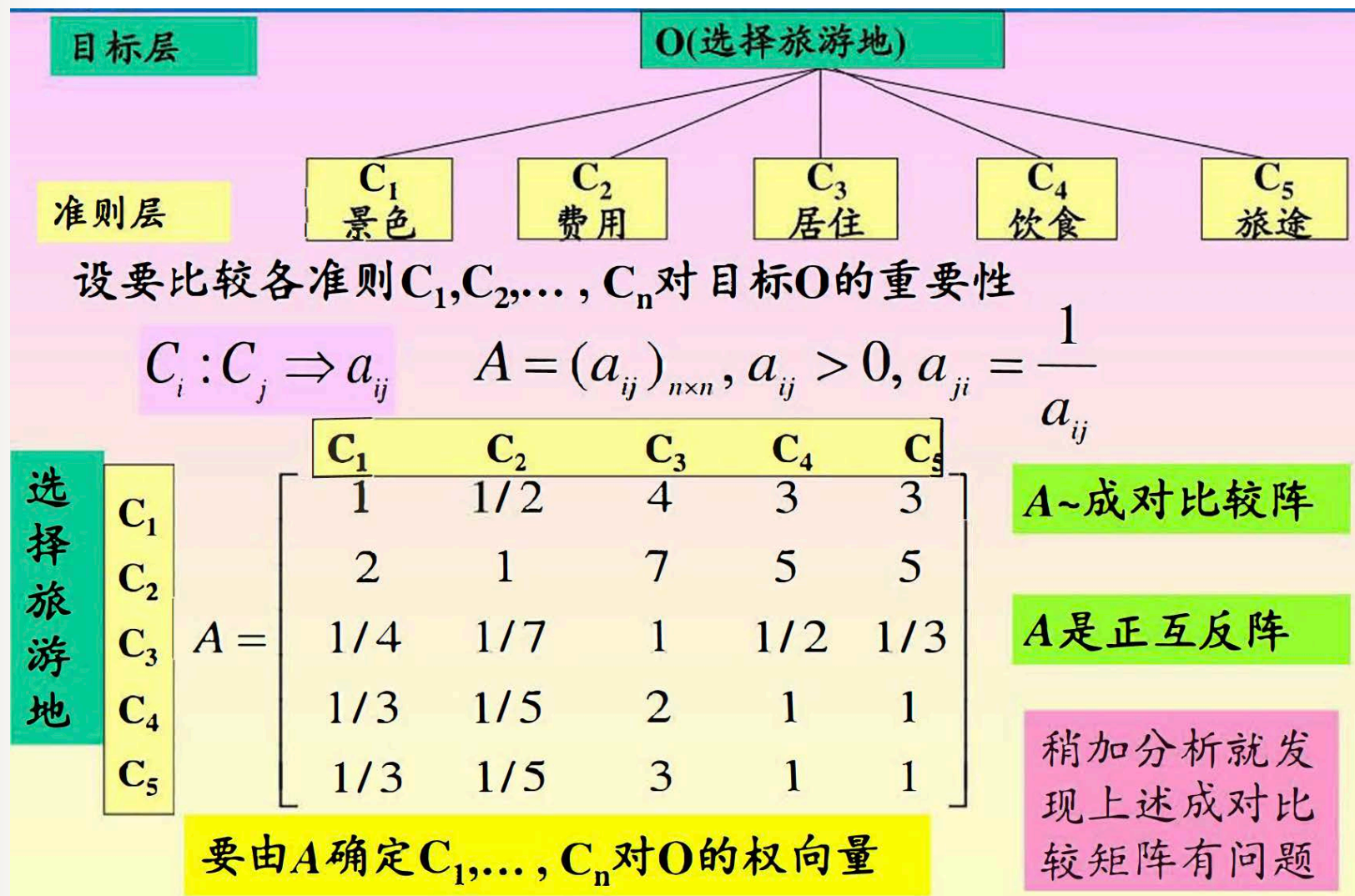
定义（正互反矩阵）：方阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ ，其中 $a_{ij}>0$ ，若 $a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$ ，称A为正互反矩阵.

定义（一致矩阵）：方阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ ，其中 $a_{ij}>0$ ，若 $a_{ik} a_{kj} = a_{ij}$ ，称A为一致矩阵.

结论：1.正互反矩阵对角线元素 $a_{ii} = 1$.

2. 一致矩阵是正互反矩阵. 但逆命题不一定成立.

反例:



反例:

成对比较的不一致情况

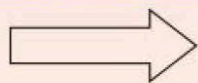
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \dots \\ 2 & 1 & 7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

不一致

$$a_{21} = 2 \quad (C_2 : C_1)$$

$$a_{13} = 4 \quad (C_1 : C_3)$$

一致比较



$$a_{23} = 8 \quad (C_2 : C_3)$$

说明构造的判断矩阵不太合理.

正互反矩阵与一致矩阵性质：

性质1：正互反矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的最大特征值 $\lambda_{max} \geq n$.

性质2：一致矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则 $\text{rank}(A)=1$.

性质3：一致矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的最大特征值 $\lambda_{max}=n$ ，其余特征根为0.

性质4：一致矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的最大特征值 λ_{max} 对应的特征向量为 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ ，则 $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$.

性质5：正互反矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一致矩阵的充要条件是 $\lambda_{max} = n$.

性质6：一致矩阵的任意列向量均是最大特征值对应的特征向量.

上述性质给出了求解一致矩阵重要性权重的方法。

一致性指标定义：

定义（CI指标）：对于正互反矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，一致性指标

$$CI := \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}.$$

备注：

CI=0， 有完全的一致性.

CI接近于0， 有满意的一致性.

CI越大， 不一致性越严重.

一致性指标定义:

为衡量 CI 的大小, 引入**随机一致性指标 RI** 。方法为

随机构造500个成对比较矩阵 $A_1, A_2, \dots, A_{500}$

则可得一致性指标 $CI_1, CI_2, \dots, CI_{500}$

$$RI = \frac{CI_1 + CI_2 + \dots + CI_{500}}{500} = \frac{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{500}}{500} - n}{n - 1}$$

Saaty的结果如下

随机一致性指标 RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

一致性指标定义：

定义一致性比率： $CR = \frac{CI}{RI}$

一般，当一致性比率 $CR = \frac{CI}{RI} < 0.1$ 时，认为 A

的不一致程度在容许范围之内，有满意的一致性，通过一致性检验。可用其归一化特征向量作为权向量，否则要重新构造成对比较矩阵 A ，对 a_{ij} 加以调整。

一致性检验：利用一致性指标和一致性比率 < 0.1 及随机一致性指标的数值表，对 A 进行检验的过程。

一致性检验例子:

“选择旅游地”中
准则层对目标的权
向量及一致性检验

最大特征根 $\lambda=5.073$

准则层对目标的成对比较阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

权向量(特征向量) $w=(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)^T$

$$\text{一致性指标 } CI = \frac{5.073 - 5}{5 - 1} = 0.018$$

随机一致性指标 $RI=1.12$ (查表)

$$\text{一致性比率 } CR = 0.018 / 1.12 = 0.016 < 0.1$$

通过一致
性检验



正互反矩阵最大特征值及特征向量的计算：

1. Python计算 : $\text{Lambda}, W = \text{numpy.linalg.eig}(A)$.
2. 近似计算

最大特征值与特征向量的近似计算:

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路——一致阵的任一行向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

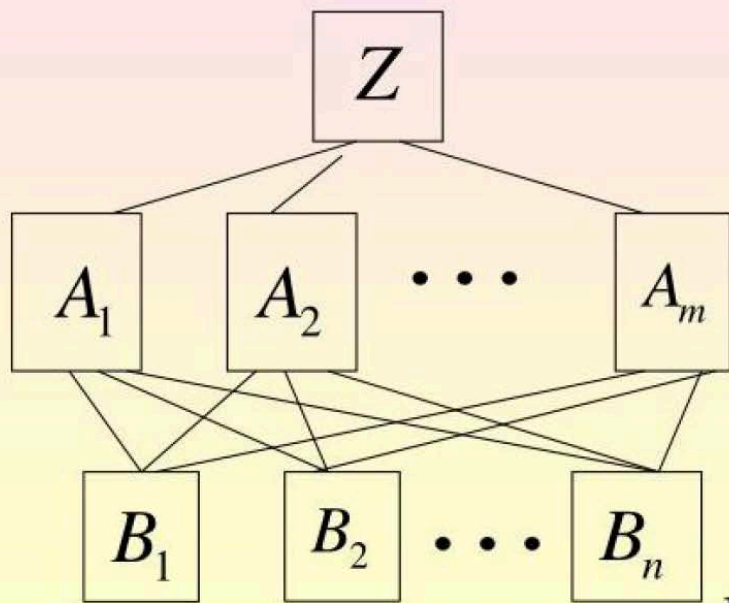
$$\begin{array}{l} \text{例 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列向量归一化}} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.615 & 0.545 \\ 0.3 & 0.308 & 0.364 \\ 0.1 & 0.077 & 0.091 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{求行和} \\ \text{归一化}}} \begin{bmatrix} 0.587 \\ 0.324 \\ 0.089 \end{bmatrix} = w \end{array}$$

$$Aw = \begin{bmatrix} 1.769 \\ 0.974 \\ 0.268 \end{bmatrix} \xrightarrow{Aw = \lambda w} \lambda = \frac{1}{3} \left(\frac{1.769}{0.587} + \frac{0.974}{0.324} + \frac{0.268}{0.089} \right) = 3.009$$

精确结果: $w = (0.588, 0.322, 0.090)^T$, $\lambda = 3.010$

层次总排序:

- 计算某一层次所有因素对于最高层(总目标)相对重要性的权值, 称为层次总排序。
- 这一过程是从最高层次到最低层次依次进行的。



A层 m 个因素 $A_1, A_2, \dots, A_m$,

对总目标 Z 的排序为

$a_1, a_2, \dots, a_m$

B 层 n 个因素对上层 A 中因素为 A_j

的层次单排序为

$b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$

B 层的层次总排序为:

即 B 层第 i 个因素对总目标

的权值为: $\sum_{j=1}^m a_j b_{ij}$

$$B_1 : a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \cdots a_m b_{1m}$$

$$B_2 : a_1 b_{21} + a_2 b_{22} + \cdots a_m b_{2m}$$

...

$$B_n : a_1 b_{n1} + a_2 b_{n2} + \cdots a_m b_{nm}$$

A B	$A_1, A_2, \cdots, A_m$ $a_1, a_2, \cdots, a_m$	B层的层次 总排序
B_1	$b_{11} \quad b_{12} \quad b_{1m}$	$\sum_{j=1}^m a_j b_{1j} = b_1$
B_2	$b_{21} \quad b_{22} \quad b_{2m}$	$\sum_{j=1}^m a_j b_{2j} = b_2$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	
B_n	$b_{n1} \quad b_{n2} \quad b_{nm}$	$\sum_{j=1}^m a_j b_{nj} = b_n$

层次总排序一致性检验：

设B层对 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 对上层 $A_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 层中的层次单排序一致性指标为 CI_j , 随机一致性指标为 RI_j

则层次总排序的一致性比率为：

$$CR = \frac{a_1 CI_1 + a_2 CI_2 + \dots + a_m CI_m}{a_1 RI_1 + a_2 RI_2 + \dots + a_m RI_m}$$

当 $CR < 0.1$ 时，认为层次总排序通过一致性检验。层次总排序具有满意的一致性，否则需要重新调整那些一致性比率高的判断矩阵的元素取值。

到此，根据最下层（决策层）的层次总排序做出最后决策。



层次分析法的基本步骤归纳如下

1. 建立层次结构模型

该结构图包括目标层，准则层，方案层。

2. 构造成对比较矩阵

从第二层开始用成对比较矩阵和1~9尺度。

3. 计算单排序权向量并做一致性检验

对每个成对比较矩阵计算最大特征值及其对应的特征向量，利用一致性指标、随机一致性指标和一致性比率做一致性检验。若检验通过，特征向量（归一化后）即为权向量；若不通过，需要重新构造成对比较矩阵。

4. 计算总排序权向量并做一致性检验

计算最下层对最上层总排序的权向量。

利用总排序一致性比率

$$CR = \frac{a_1 CI_1 + a_2 CI_2 + \cdots + a_m CI_m}{a_1 RI_1 + a_2 RI_2 + \cdots + a_m RI_m}$$

$$CR < 0.1$$

进行检验。若通过，则可按照总排序权向量表示的结果进行决策，否则需要重新考虑模型或重新构造那些一致性比率 CR 较大的成对比较矩阵。



层次分析法的局限

囿旧——只能从原有的方案中优选一个出来，没有办法得出更好的新方案；

粗略——该法中的比较、判断以及结果的计算过程都是粗糙的，不适用于精度较高的问题。；

主观——从建立层次结构模型到给出成对比较矩阵，人主观因素对整个过程的影响很大，这就使得结果难以让所有的决策者接受。当然采取专家群体判断的办法是克服这个缺点的一种途径。



层次分析法实例:

例4：选拔人才.

某单位拟从3名干部中选拔一名领导，
选拔的标准有政策水平、 工作作风、 业务知识、 口才、 写作能力和健康状况。
下面用AHP方法对3人综合评估、 量化
排序。

(1)建立层次结构模型

目标层

选一领导干部

准则层

健康状况

业务知识

写作能力

口才

政策水平

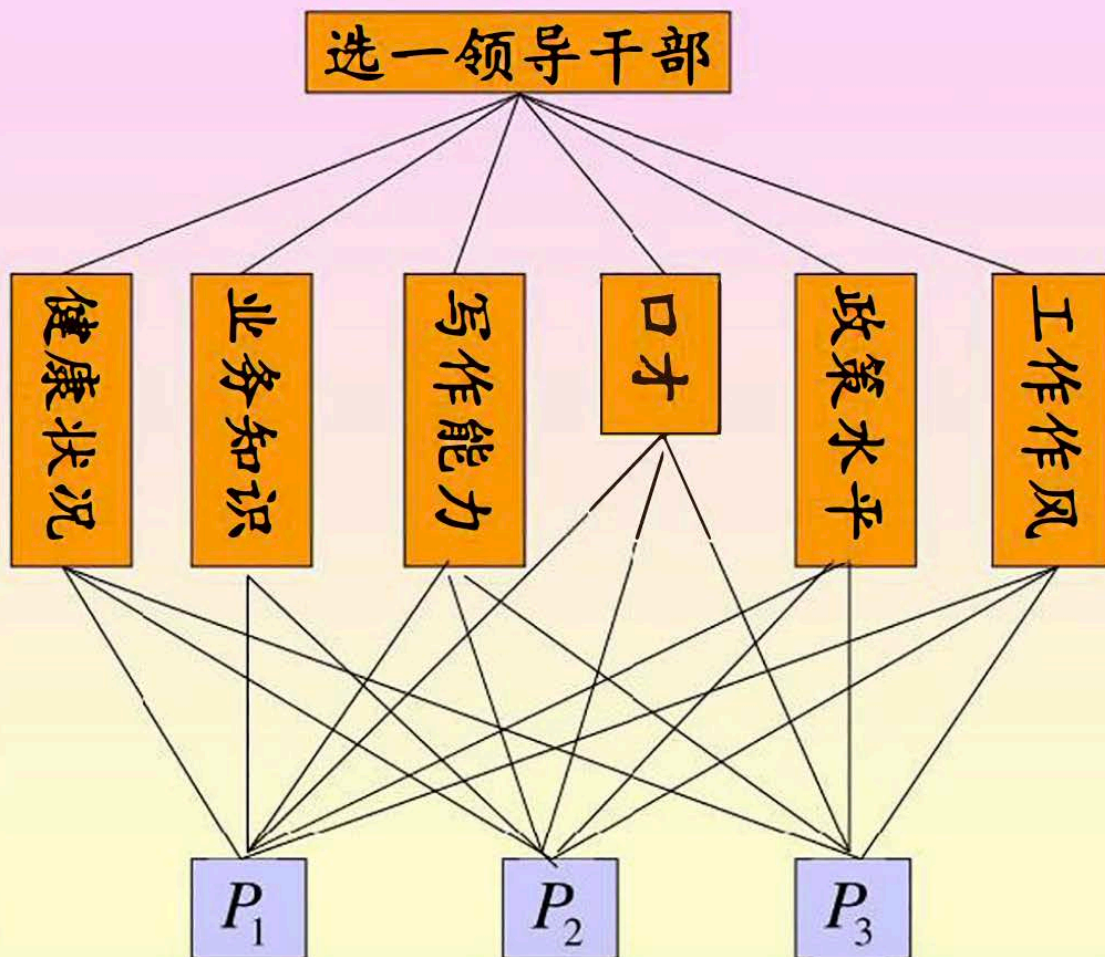
工作作风

方案层

P_1

P_2

P_3



(2)构造成对比较矩阵及 层次单排序

	健康情况	业务知识	写作能力	口才	政策水平	工作作风
健康情况	1	1	1	4	1	1/2
业务知识	1	1	2	4	1	1/2
写作能力	1	1/2	1	5	3	1/2
口才	1/4	1/4	1/5	1	1/3	1/3
政策水平	1	1	1/3	3	1	1
工作作风	2	2	2	3	1	1

A的最大特征值 $\lambda_{\max} = 6.35$, 相应的特征向量为:

$$W^{(2)} = (0.16, 0.19, 0.19, 0.05, 0.12, 0.30)^T$$

一致性指标 $CI = \frac{6.35 - 6}{6 - 1} = 0.07$ 随机一致性指标 $RI = 1.24$ (查表)

一致性比率 $CR = 0.07 / 1.24 = 0.0565 < 0.1$

通过一致性检验

假设3人关于6个标准的判断矩阵为：

健康情况

$$B_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

业务知识

$$B_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 \\ 4 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

写作能力

$$B_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

口才

$$B_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

政策水平

$$B_5^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

工作作风

$$B_6^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 1/7 & 1 & 5 \\ 1/9 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可求得各属性的最大特征值和相应的特征向量。

各属性的最大特征值

特征值	健康情况	业务知识	写作能力	口才	政策水平	工作作风
$\lambda_{\max}$	3.02	3.02	3.05	3.05	3.00	3.02

$$W^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.10 & 0.32 & 0.28 & 0.47 & 0.77 \\ 0.63 & 0.33 & 0.22 & 0.65 & 0.47 & 0.17 \\ 0.24 & 0.57 & 0.46 & 0.07 & 0.07 & 0.05 \end{pmatrix}$$

均通过一致性检验

(3)层次总排序及一致性检验

从而有

$$W = W^{(3)} W^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.10 & 0.32 & 0.28 & 0.47 & 0.77 \\ 0.63 & 0.33 & 0.22 & 0.65 & 0.47 & 0.17 \\ 0.24 & 0.57 & 0.46 & 0.07 & 0.07 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.19 \\ 0.19 \\ 0.05 \\ 0.12 \\ 0.30 \end{pmatrix}$$
$$W = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.34 \\ 0.26 \end{pmatrix}$$

即在3人中应选择A担任领导职务。

Python 代码：一致性检验 Consistency

```
import numpy as np
import sys
RI=np.array([0,0,0.58,0.90,1.12,1.24,1.32,1.41])
#一致性检验
def Consistency(A):
    n=A.shape[0]
    #迭代法计算
    Lambda,W=np.linalg.eig(A)
    Lambda_max=Lambda[0].real
    W2=W[:,0].real/W[:,0].real.sum()
    """
    #近似计算
    A0=A/A.sum(axis=0)
    A1=A0.sum(axis=1)
    W2=A1/A1.sum(axis=0)
    Lambda_max=(np.matmul(A,W2)/W2).sum()/n
    """
    CI=(Lambda_max-n)/(n-1)
    CR=CI/RI[n-1]
```

```
if CR<0.1:
    return True,W2,CI
else:
    return False,W2,CI
```


Python 代码: main

```
A=np.array([[1.0,1,1,4,1,1/2],[1,1,2,4,1,1/2],\
            [1,1/2,1,5,3,1/2],[1/4,1/4,1/5,1,1/3,1/3],\
            [1,1,1/3,3,1,1],[2,2,2,3,1,1]])
flag,W2,_=Consistency(A)
if flag==True:
    print("A层一致性检验通过!")
else:
    print("A层一致性检验未通过，请修改判断矩阵！")
    sys.exit
B=np.zeros((6,3,3))
B[0,:,:]=np.array([[1,1/4,1/2],[4,1,3],[2,1/3,1]])
B[1,:,:]=np.array([[1,1/4,1/4],[4,1,1/2],[4,2,1]])
#B[2,:,:]=np.array([[1,3,1/3],[1/3,1,1/3],[3,3,1]])
B[2,:,:]=B[0,:,:]
B[3,:,:]=np.array([[1,1/3,5],[3,1,7],[1/5,1/7,1]])
B[4,:,:]=np.array([[1,1,7],[1,1,7],[1/7,1/7,1]])
#B[5,:,:]=np.array([[1,7,9],[1/7,1,5],[1/9,1/5,1]])
B[5,:,:]=B[0,:,:]
```

Python 代码: .

```
W3=np.zeros((3,6))
ci=np.zeros((6,1))
for j in range(B.shape[0]):
    flag,w,ci[j]=Consistency(B[j,:,:])
    if flag==True:
        print("B%d层一致性检验通过!"%(j+1))
    else:
        print("B%d层一致性检验未通过,请修改判断矩阵"%(j+1))
        W3[:,j]=w
W=np.matmul(W3,W2)
cr=np.matmul(W2,ci)/(W2.sum()*RI[2])
print("总排序一致性检验指标CR=%.4f"%cr)
print("第%d位候选者入选"%(W.argmax()+1))
```



推广：

1. ANP (网络层次分析法)
2. EWM-AHP（熵值-层次分析法），2022美赛O奖论文.