



数学建模

建模方法——微分方程II



当我们描述实际对象的某些特性随时间（空间）而演变的过程、分析它的变化规律、预测它的未来形态、研究它的控制手段时。通常要建立对象的动态模型。

在许多实际问题中，当直接导出变量之间的函数关系较为困难，但导出包含未知函数的导数或微分的关系式较为容易时，可用建立微分方程模型的方法来研究该问题。

在研究实际问题时，常常会联系到某些变量的变化率或导数，这样所得到变量之间的关系式就是微分方程模型。

微分方程模型反映的是变量之间的间接关系，因此，要得到直接关系，就得求解微分方程。



微分方程的实质：

实际对象的某些特性随时间（空间）而演变的过程，是一个动态模型。

作用：

- 1、分析它的变化规律；
- 2、预测它的未来形态；
- 3、研究它的控制手段。

与统计方法的区别：

机理；事件发生的数量统计规律

变化率和相对变化率

- 变化率：单位时间变化的量。利用导数描述，也称为绝对变化率，记为

$$dx/dt$$

变化率是有量纲的量。它在实际问题中有多种名字，如速度、增长率等。

- 相对变化率：函数变量的一个单位的变化率

$$\frac{dx / dt}{x}$$

微分方程建模

- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 根据函数及其**变化率**之间的关系确定函数
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

求解微分方程有三种方法：

- 1) 求精确解；
- 2) 求数值解（近似解）；
- 3) 定性理论方法。

建立微分方程模型的方法

(1) 微元分析法

利用已知的定理与规律寻找微元之间的关系式，与直接方法不同的是对微元而不是直接对函数及其导数应用规律。

例子：人口增长 **Marthus**、**Logistic** 模型。

(2) 根据规律列方程

利用数学、力学、物理、化学等学科中的定理或经过实验检验的规律等来建立微分方程模型。



(3) 模拟近似法

在生物、经济等学科的实际问题中，许多现象的规律性不很清楚，即使有所了解也是极其复杂的，建模时在不同的假设下去模拟实际的现象，建立能**近似反映问题**的微分方程，然后从数学上求解或分析所建方程及其解的性质，再去同实际情况对比，检验此模型能否刻画、模拟某些实际现象。

建模方法 1. 微元法

在自变量的微小的区间内以简单的线性近似形式描述有关变量之间的平衡关系，得到**差分方程**，再利用微分学的思想，通过取极限，得到以**微分方程**的形式描述的数学模型。

微元法是微分方程建模的主要工具之一。它的特点是在一个局部分析模型，这样，**在局部利用不变代变**（差一个高阶无穷小），就可以利用初等分析的方法建立局部模型，然后通过取极限得到微分方程模型。

例1 池水含盐控制问题

池中有 2000m^3 的盐水，浓度为 $0.001\text{kg}/\text{m}^3$

从池的上部向池中以常速度 $6\text{m}^3/\text{min}$ 注入浓度为 $0.5\text{kg}/\text{m}^3$ 的盐水。混合后的盐水将从池的下部以常速度 $4\text{m}^3/\text{min}$ 流出。

问题1. 需要多长时间水池中盐水浓度从 $0.001\text{kg}/\text{m}^3$ 提高到 $0.2\text{kg}/\text{m}^3$?

问题2. 当水池中盐水浓度达到 $0.2\text{kg}/\text{m}^3$ 时，用清水代替盐水注入池中，又需要多长时间水池中盐水浓度从 0.2 下降到 0.1 ?



假设:

盐水注入池中后迅速混合,使得盐水浓度均匀。

系统状态变量

在时刻 t : 盐水浓度为 $p(t)=S(t)/V(t)$

池中盐水体积为 $V(t)$, 盐量为 $S(t)$,

系统参量 (参变量)

池中原有盐水体积 $V_0=2000$, 原有盐量 $S_0=2$,

流入盐水速度 $r_i=6$, 流入盐水浓度 $p_i=0.5$ 或 0 ,

流出盐水速度 $r_o=4$, 流出盐水浓度?

流入盐水浓度改变阈值为 $p_1=0.2$,

仿真停止阈值 $p_2=0.1$

模型： 在一个时间步长的时间间隔 $[t, t+\Delta t]$ 内，
系统状态有如下转变（**平衡关系：改变量=增减量**）

$$V(t+\Delta t)=V(t)+\Delta t(r_i-r_o)$$

$$S(t+\Delta t)=S(t)+\Delta t(r_i p_i(t)-r_o p(t))$$

$$p(t+\Delta t)=S(t+\Delta t)/V(t+\Delta t)$$

初始盐水浓度为0.001，取流入盐水浓度 $p_i(t)=0.5$ ；
一旦盐水浓度达到0.2，取 $p_i(t)=0$ ；一旦盐水浓度达到
0.1，停止仿真。

注： 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时

$$p(t) = S(t)/V(t)$$

$$\frac{dV}{dt} = r_I - r_o$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = r_I p_I(t) - r_o p(t)$$

变形：

$$\frac{d}{dt}[p(t)V(t)] = p_I(t)r_I(t) - p(t)r_O(t)$$

$$\frac{dV}{dt} = r_I(t) - r_O(t)$$

$$\text{模型} : V(t) \frac{dp(t)}{dt} = r_I(t)[p_I(t) - p(t)]$$

$$p(0) = p_0$$

$$V(t) = V_0 + \int_0^t [r_I(\tau) - r_O(\tau)] d\tau$$

池水含盐控制问题系统仿真算法（伪代码）：

输入：参数 $r_i=6$, $r_o=4$, $p_i=0.5$, 时间步长 $\Delta t=2$.

初值 $t_0=0$, $V_0=2000$, $S_0=2$, $p_0=S_0/V_0$,

第 n 步 $t(n)=t(n-1)+\Delta t$,

$V(n)=V(n-1)+(r_i-r_o)\Delta t$,

$S(n)=S(n-1)+\Delta t(r_i p_i - r_o p(n-1))$, $p(n)=S(n)/V(n)$

当 $p_i=0.5$ 时,

如果 $p(n)<0.2$, 进入 $n+1$ 步,

否则, 记录下此刻 t_1 , 改取 $p_i=0$, 进入 $n+1$ 步。

当 $p_i=0$ 时,

如果 $p>0.1$, 进入 $n+1$ 步,

否则, 记录下此刻时间 t_2 , 结束仿真。

输出：达到最大浓度时间 t_1 , 降到指定浓度时间 t_2

Python代码:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#参数设定
ri=np.array([6.0])
ro=np.array([4.0])
pi=np.array([0.5])
dt=2
```

```
#初值设定
t0=np.array([0.0])
V0=np.array([2000.0])
S0=np.array([2.0])
p0=S0/V0
```

```
V=V0
S=S0
p=p0
t=t0
```

```
while p[-1]<0.2:
    t=np.append(t,t[-1]+dt)#时间
    V+=(ri-ro)*dt #体积变化
    S+=(ri*pi-ro*p[-1])*dt #含盐量变化
    p=np.append(p,S/V) #浓度变化
#记录时刻
t1=t[-1]
```

```
#重新设置浓度
pi=0
while p[-1]>0.1:
    t=np.append(t,t[-1]+dt) #时间
    V+=(ri-ro)*dt #体积变化
    S+=(ri*pi-ro*p[-1])*dt #含盐量变化
    p=np.append(p,S/V) #浓度变化
#记录时刻
t2=t[-1]
```

#以下为画图和显示结果

```
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei'] #用来正常显示中文标签
```

```
plt.close('all')
```

```
plt.figure(1)
```

```
plt.plot(t,p,label='浓度变化')
```

```
plt.legend()
```

```
plt.plot(t1,0.2,'o')
```

```
plt.text(t1,0.2,'(%.0f,0.2)'%t1)
```

```
plt.plot(t2,0.1,'d')
```

```
plt.text(t2,0.1,'(%.0f,0.1)'%t2,ha='right')
```

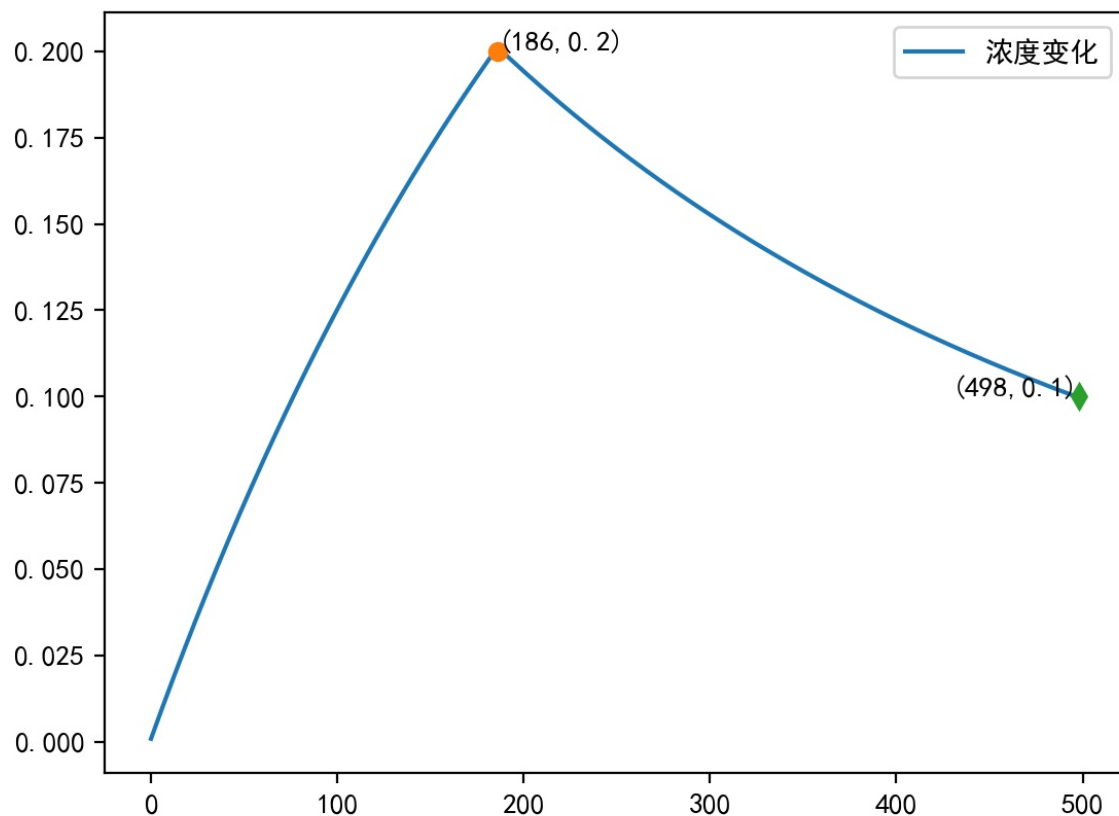
```
print("%.2f分钟浓度变化到最大0.2"%t1)
```

```
print("再过%.2f分钟浓度从0.2变化到0.1"%(t2-t1))
```

结果：

需要 $t_1=186$ 分钟将水池中盐水浓度从0.001提高到0.2。

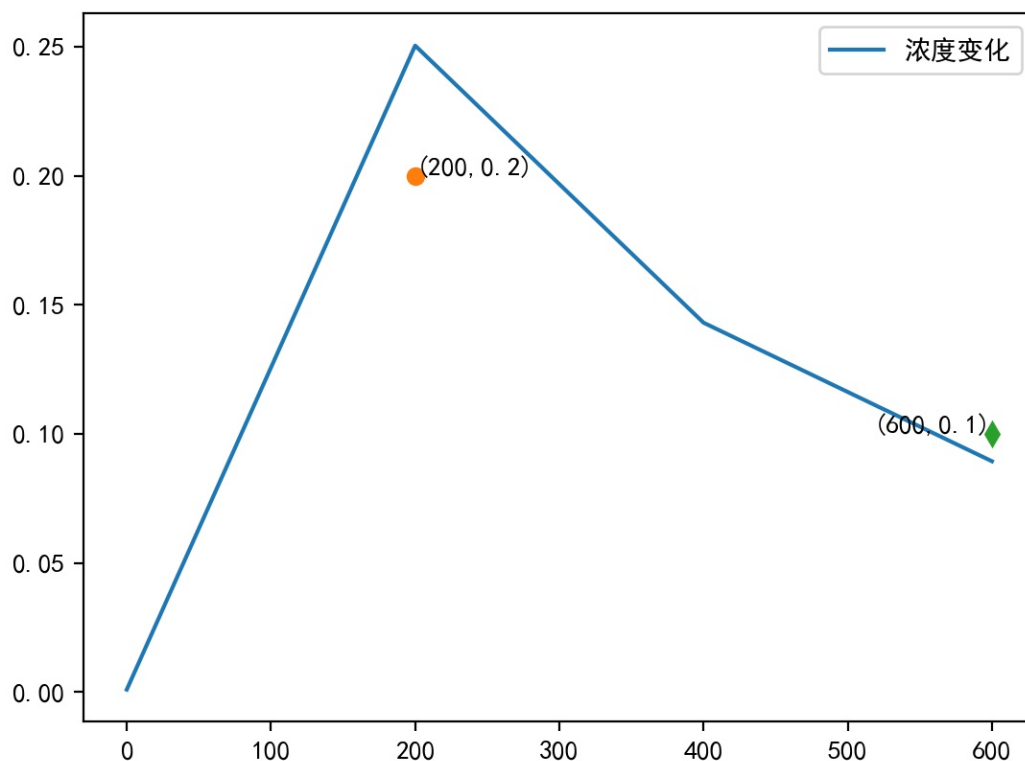
又需要 $t_2-t_1=312$ 分钟水将池中盐水浓度从0.2恢复到0.1。



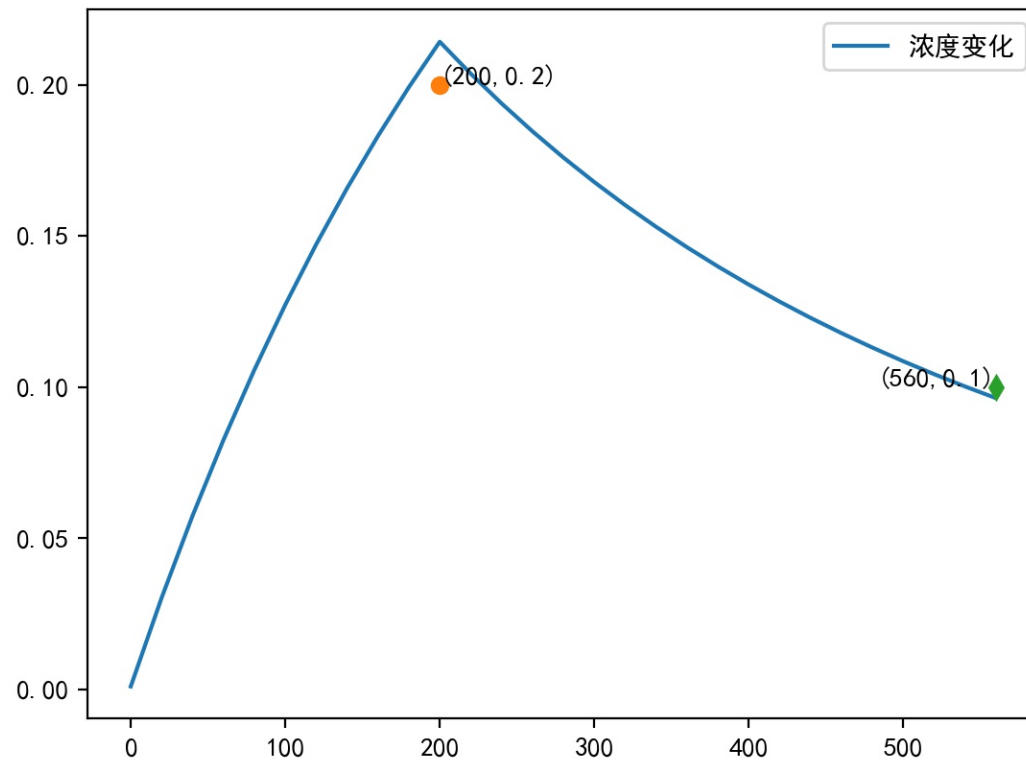
注意：时间步长的确定根据实际问题要求和计算精确度要求。

例如：

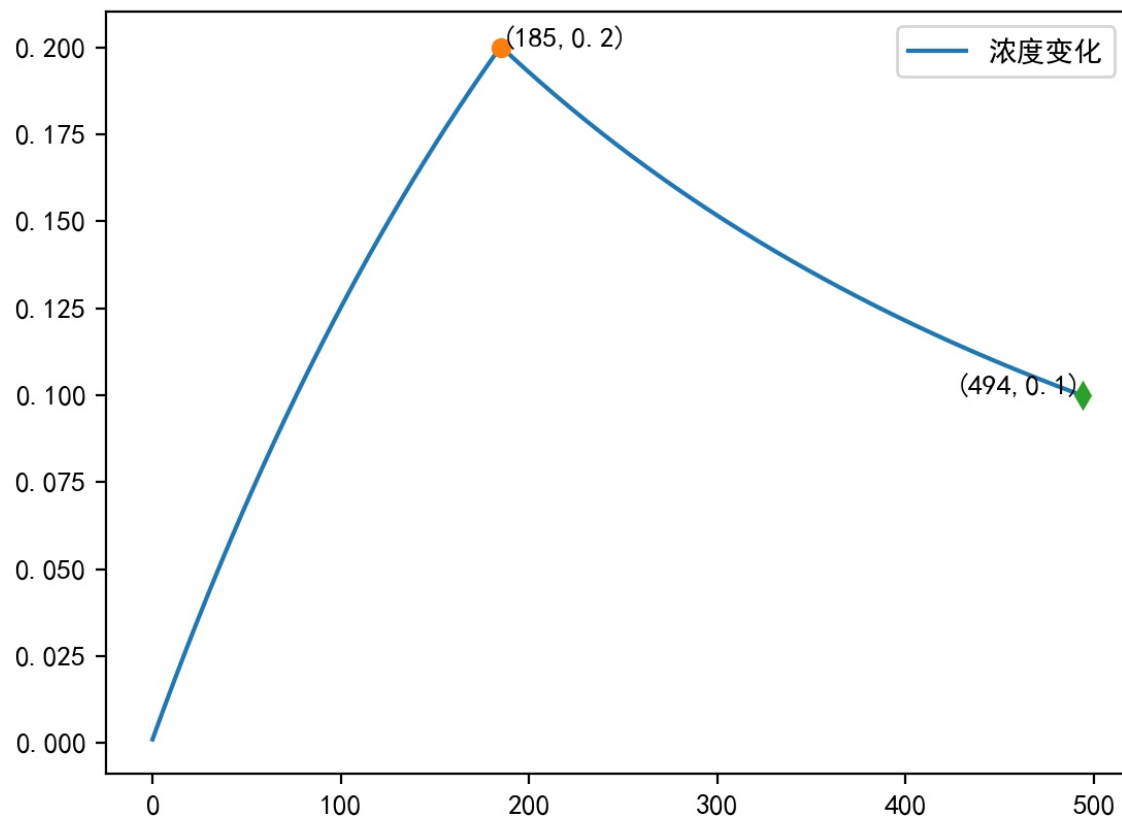
$\Delta t=200$ ，
步长太大，
精度较差，
结果失真。



$\Delta t=20$ 结果仍然失真。



$\Delta t=1$ 结果更精确



例2. 进一步考虑池水含盐问题(偏微分方程)。

当 $r_I(t) = r_O(t) = r$ 时 $V(t) = V_0$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{r}{V_0} [p_I(t) - p(t)]$$

当流入的盐水的浓度与原水池中盐水浓度不一样时，如果水池的面积很大，进水和出水口相对很小，假设注入池中的盐水能迅速与池中原有的盐水均匀地混合是不合理的。

当盐水流进流出速度相同时，池水体积不变，记所占空间区域为 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 。



修改假设,

水池中盐水浓度的变化是连续的, 其分布密度函数 $p(t, x)$ 是时间变量 $t > 0$ 和空间位置 x 的光滑函数。

在时刻 t 盐水区域 Ω 内盐量为

在时刻 t 盐水内任意小区域 $\Delta\Omega$ 内的盐量为

$$P(t) = \int_{\Omega} p(t, x) dx$$

$$P_{\Delta\Omega}(t) = \int_{\Delta\Omega} p(t, x) dx$$

考虑到水池中的盐量流动有两个因素造成，一个因素是由于盐水浓度的不均匀，根据物理热力学定律，分子的随机游动造成宏观的物质扩散现象，物质总是从浓度高的地方向浓度低的地方扩散。另一个是由于水的流动。

补充假设，

1. 对由于盐水浓度差造成的盐量流，Fick 定律成立，即盐量流大小与盐浓度的梯度大小成正比（比例系数为常数 D ），方向则相反。
2. 已知水池中各点水流速度 $\vec{v}$ 。

于是，盐流量场 $\vec{J}(t, x) = -D\nabla p(t, x) + \vec{v}(t, x)p(t, x)$

按照微元法建模，考虑在一个微小的时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内，一个微元体 $\Delta\Omega \subset \Omega$ 内盐水浓度的变化。

平衡原则：

在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内微元体内 $\Delta\Omega$ 盐的改变量

= 在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内流通过微元体边界 $\partial(\Delta\Omega)$ 的盐流量
(流进流出导致的 $\Delta\Omega$ 中盐的改变量)。

即

$$P_{\Delta\Omega}(t + \Delta t) - P_{\Delta\Omega}(t) = Q(t, \Delta t, \Delta\Omega)$$

$$Q(t, \Delta t, \Delta\Omega) = - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial(\Delta\Omega)} \vec{n}(x) \cdot \vec{J}(t, x) ds$$

$$\int_{\Delta\Omega} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

$$= \int_{\Delta\Omega} [p(t + \Delta t, x) - p(t, x)] dx = - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial(\Delta\Omega)} \vec{n}(x) \cdot \vec{J}(\tau, x) ds d\tau$$

$$= - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta\Omega} \nabla \cdot \vec{J}(\tau, x) dx d\tau$$

在等式两边除以 Δt 和 $|\Delta\Omega|$ ，
再令 $\Delta t \rightarrow 0$ ， $\Delta\Omega \rightarrow 0$ ，

$$\text{得到 } \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$$

$$\text{代入 } \vec{J} = -D\nabla p + \vec{v}p$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}p) = D\Delta p, \quad x \in \Omega \quad t > 0$$



水池边界 $\partial\Omega=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$ 在 Γ_1 上有盐水流入, 浓度为 $P_I(t)$, 在 Γ_2 上有盐水流出, 流速为 r , 在 Γ_3 上没有盐水流入流出。

我们得到一个偏微分方程初边值问题构成的池水含盐的动态模型.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}p) = D\Delta p, \quad x \in \Omega \quad t > 0$$

$$p|_{\Gamma_1} = p_I(t) \quad \left[-D \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} + \vec{v} \cdot \vec{n}p \right]_{\Gamma_2} = rp \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0$$

初始条件 $p(0,x)=p_0(x)$,

流速模型

假设水池内流体各向同性且不可压，
则流速满足Navier-Stokes方程

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = \mu \Delta \vec{v},$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad t > 0$$

■ 边界条件

$$\vec{n} \cdot \vec{v} \big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = r, \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \big|_{\Gamma_3} = 0$$

其中 $\mathbf{v}$ 代表速度， p 代表压强。第一个方程来自牛顿第二定律，第二个方程称为连续性方程，意义是不可压缩流体是连续的（物质不会凭空产生或消失）。
对流项 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ ，它代表惯性力，是方程非线性的来源，
而粘性项 $\mu \Delta \mathbf{v}$ 代表粘性力，
可以说研究 N-S 方程性质就是判断这两项的搏斗谁会赢

问题来啦

- 这么复杂的偏微分方程，如何求解呀??
- 对于前面的简化情形得到的微分方程：数值解法或动态仿真

$$V(t) \frac{dp(t)}{dt} = r_I(t)[p_I(t) - p(t)]$$

$$p(0) = p_0$$

$$V(t) = V_0 + \int_0^t [r_I(\tau) - r_o(\tau)] d\tau$$

- 对加入流量场的偏微分方程，可参考“计算流体力学”的相关内容

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}p) = D\Delta p, \quad x \in \Omega \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0$$

$$p|_{\Gamma_1} = p_I(t) \quad \left[-D \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} + \bar{v} \cdot \bar{n} p \right]_{\Gamma_2} = r p$$

- NS方程——湍流

<https://baijiahao.baidu.com/s?id=1638485952345907448&wfr=spider&for=pc>

微分方程求解:

- 只有一些特殊类型的微分方程问题能够得到用解析表达式表示的函数解，大量的微分方程问题很难得到其解析解，有的甚至无法用解析表达式来表示。因此，只能依赖于数值方法去获得微分方程的数值解。
- **微分方程的数值解**：就是寻求方程的解在自变量的一系列离散节点上的近似值。
- 设微分方程问题的解 $y(x)$ 的存在区间是 $[a,b]$ ，初始点 $x_0=a$ ，将 $[a,b]$ 进行划分得一系列节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ ，其中 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 。


$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

求：精确解 $y(x)$ 在节点

$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ 处的

近似解： $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$



主要方法

- 欧拉（Euler）方法、向后欧拉法、梯形法及梯形法的预估校正法
- 欧拉法的收敛性
- 龙格—库塔方法、线性多步法、预估—校正法。
- 参考：计算数学书籍
- [1]李荣华、刘播，微分方程数值解法（第四版），高等教育出版社，2009
- [2]李荣华，偏微分方程数值解法，高等教育出版社，2005.

求解(偏)微分方程的工具

- 1. python利用scipy.integrate.odeint求解常微。
- 2. MATLAB求微分方程解析解: **dsolve**
- 3. MATLAB求微分方程数值解: **ode45, ode23, ode15s, ode23s** (即不同阶数的龙格库塔算法)
- 4. MATLAB求解偏微分方程的数值解: **pdepe** 函数, **pdetool** 工具箱(PDE Toolbox) (只能求解二元函数的偏微分方程相关问题)
- 5. **COMSOL Multiphysics** 软件是一款大型的高级数值仿真软件, 应用于各个领域的科学研究以及工程计算, 模拟科学和工程领域的各种物理过程。是以有限元法为基础, 通过求解偏微分方程(单场)或偏微分方程组(多场)来实现真实物理现象的仿真, 用数学方法求解真实世界的物理现象。范围涵盖从流体流动、热传导、到结构力学、电磁分析等多种物理场, 用户可以快速的建立模型。

(官网可免费下载) <https://cn.comsol.com/>

方法2. 利用物理定律、或变量之间的平衡关系建立微分方程模型

1. 把语言叙述的情况概念化为文字方程,。注意不同领域对“导数”的表达,如“速度”、“增长率”、“衰变率”、“边际值”等等,利用所涉及的原则和物理定律,或者按平衡关系,例如,在一个时间段内,变化=输入-输出,列出文字方程;
2. 引入数学符号,将文字方程“翻译”成微分方程,配备物理单位;
3. 给出定解条件,包括初值或边值条件;
4. 解方程,包括对解的定性分析和数值计算;
5. 基于模型的解给出问题的答案。



例3. 将一支读数为 60° 的温度计放进烤箱，10分钟后温度计的读数为 70° ，又过10分钟，读数为 76° 。推测一下烤箱的温度。

牛顿冷却定律：将温度为 T 的物体放入常温为 m 的介质中， T 的变化速率正比于 T 与周围介质的温度差。

记 $T(t)$ 为温度计在时刻 t 时的读数， $T(0)=60$ 。

假设：温度计放到室外，不改变室外温度 m 。

模型： $dT/dt=k(T-m)$ $T(0)=60$

解： $T(t)=60 e^{kt}+m(1-e^{kt})$

$$70=60e^{10k}+m(1-e^{10k})$$

$$76=70e^{10k}+m(1-e^{10k})$$

$$\Rightarrow e^{10k}=0.6 \quad m=85$$

答：室外的温度 85° 。



热扩散模型

例4. 最佳食品烤盘（2013MCM A题）

在矩形烤盘中烘烤食品(例如蛋糕)时热量集中在4个角点处，而食品也在这些角点处烤过头(在4条边处不那么过头). 在圆形烤盘中沿其外边缘热量均匀分布，食品也不会在外边缘烤过头. 然而，因为大多数烤箱是矩形的，所以就利用烤箱的空间而言使用圆形烤盘效率不高.

建立数学模型来展示不同形状烤盘——矩形、圆形以及介乎其间的各种形状的烤盘——热量在穿过其外边缘时的分布.

记蛋糕所占区域为 Ω . 在 t 时刻, 点 $x \in \Omega$ 处的温度为 $u(t, x)$.
按照微元法建模, 考虑在一个微小的时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内,
一个微元体 $\Delta\Omega \subset \Omega$ 内热量的变化。

记时刻 t 微元体 $\Delta\Omega$ 内的热量为

平衡原则:

$$P_{\Delta\Omega}(t) = \int_{\Delta\Omega} c u(t, x) dx$$

在时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内微元体内热量的改变量 =
在时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内通过边界 $\partial(\Delta\Omega)$ 流入流出热量的总和,
即

$$P_{\Delta\Omega}(t + \Delta t) - P_{\Delta\Omega}(t) = Q(t, \Delta t, \partial(\Delta\Omega))$$

$$Q(t, \Delta t, \partial(\Delta\Omega)) = - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial(\Delta\Omega)} \vec{n}(x) \cdot \vec{J}(t, x) ds$$

$$\int_{\Delta\Omega} \int_t^{t+\Delta t} c \frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

$$= \int_{\Delta\Omega} c[u(t+\Delta t, x) - u(t, x)] dx = - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial(\Delta\Omega)} \vec{n}(x) \cdot \vec{J}(\tau, x) ds d\tau$$

在等式两边除以 Δt 和 $|\Delta\Omega|$ ，
再令 $\Delta t \rightarrow 0$ ， $|\Delta\Omega| \rightarrow 0$ ，

$$= - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta\Omega} \nabla \cdot \vec{J}(\tau, x) dx d\tau$$

得到 $c \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$

代入 $\vec{J} = -d \nabla u$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u, \quad x \in \Omega \quad t > 0, \quad (D = \frac{d}{c} > 0)$$



热扩散模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

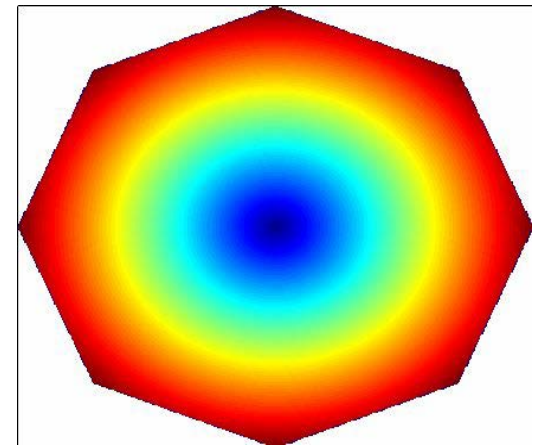
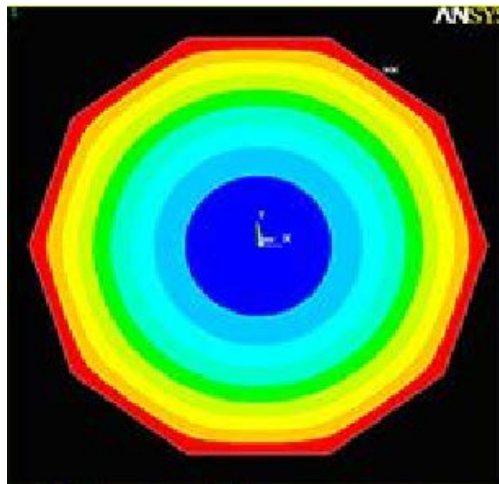
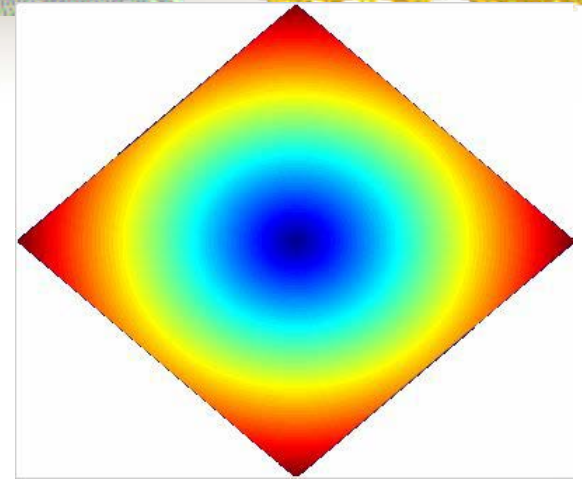
u 表示温度, D 表示热扩散系数.

在受热区域边缘对应不同的假设有不同的边界条件,

假设1: 在边缘发生热的扩散, $D \frac{\partial u}{\partial n} = a(u_0 - u)$
 u_0 为外界温度, a 为热导系数.

假设2: 在边缘温度保持不变. $u = u_0$

- 假设1对应的模型得到的结果与实际相符.
- 假设2对应的模型得到的结果显然与实际不符.





可以用微分方程建立模型的问题

1. 农作物灭虫药的使用

为了减少虫害对农作物收成带来的巨大损失，农民普遍使用灭虫药。从经济学观点看，什么时候使用灭虫药和使用多少药能够让损失降低到最小是备受关注的问题。试建立数学模型描述这一问题。

2. 观众厅地面设计

在影视厅或报告厅，经常会为前边观众遮挡住自己的视线而苦恼。显然，场内的观众都在朝台上看，如果场内地面不做成前低后高的坡度模式，那么前边观众必然会遮挡后面观众的视线。试建立数学模型设计良好的报告厅地面坡度曲线。



3. 捕鱼业的持续收获

考虑一个渔场，其中鱼的数量在天然环境下按一定规律增长。制定一个长期的捕捞策略，使得在鱼的数量趋于稳定的前提下，持续产量或效率达到最大。

4. 鲑鱼的数量周期变化

- 海洋中鱼的数量通常是按繁殖期长短呈周期变化的。以太平洋里的鲑鱼为例，其生长、繁殖的过程大致是：成年的鱼产下大量的卵，在卵成长为幼鱼和幼鱼长大过程中，相当大的部分被成年的鱼吃掉，剩下的还要被恶劣的环境淘汰一些，而成年的鱼在产卵后不久死掉。建立模型描述鲑鱼的周期演化过程。

5. 饮酒驾车(2004建模竞赛C题)

国家标准规定，车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于20毫克/百毫升，小于80毫克/百毫升为饮酒驾车，血液中的酒精含量大于或等于80毫克/百毫升为醉酒驾车。大李在中午12点喝了一瓶啤酒，下午6点检查时符合驾车标准，紧接着他在吃晚饭时又喝了一瓶啤酒，为了保险起见他呆到凌晨2点才驾车回家，又一次遭遇检查时却被定为饮酒驾车，这让他既懊恼又困惑，为什么喝同样多的酒，两次检查结果会不一样呢？

已知，人体的吸收和排泄引起血液中酒精的减少率正比于血液中酒精的浓度。请你参考下面给出的数据建立饮酒后血液中酒精浓度随时间变化的数学模型，用于讨论以下问题：

1. 对大李碰到的情况做出解释；
2. 根据你的模型论证：如果天天喝酒，是否还能开车？

参考数据

体重约70kg的某人在短时间内喝下2瓶啤酒后，隔一定时间测量他的血液中酒精含量（毫克／百毫升），得到数据如下：

时间(小时)	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
--------	------	-----	------	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

酒精含量	30	68	75	82	82	77	68	68	58	51	50	41
------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

时间(小时)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
--------	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

酒精含量	38	35	28	25	18	15	12	10	7	7	4
------	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	---



6. MCM1997A题恐龙捕食问题*

假设有一种独居的猎食其他动物的野兽，试设计它潜近猎物并追猎一个单只食草动物的策略，以及被追击动物逃跑策略的数学模型。

7. MCM1999C题大地污染问题*

试建立一个数学模型来决定一组给定数据资料表示的区域和时间内是否有任何污染物的产生，若有试识别新的污染物并估计污染源的位置和时间

- 8. 2019年生存博弈
讨论养龙——生长过程

- 9. 2020年向北迁移
讨论鱼群活动——迁徙情况